Prof. Dr. Armin Iske
Dr. Andreas Vollmer
M.Sc. Lars Poppe

Fachbereich Mathematik
Universität Hamburg
Wintersemester 2022/23

Übungen zu Analysis 1

Aufgaben des Tages 13 — 29. November 2022

Aufgabe 1: *(3+2+1+1 Punkte)* Im Folgenden sei (X, d) ein metrischer Raum.

(a) Beweise für eine beliebige Menge $A \subset X$ die Darstellung

$$\partial A = \{x \in X \,|\, \forall\, \varepsilon > 0 \;:\; (B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset) \;\wedge\; (B(x,\varepsilon) \cap (X \backslash A) \neq \emptyset)\}.$$

(b) Folgere aus Aufgabenteil (a) die Implikation

$$A \subset X \text{ ist offen und abgeschlossen.} \qquad \Longrightarrow \qquad \partial A = \emptyset.$$

(c) Sei $(X, d) = (\mathbb{R}, |\cdot|)$. Zeige: $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$.

(d) Sei $(X, d) = (\mathbb{Q}, |\cdot|)$ und $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Zeige, dass die Teilmenge

$$I_\alpha := \{x \in \mathbb{Q} \;:\; |x| < \alpha\} \subset \mathbb{Q}$$

keinen Rand in $\mathbb{Q}$ hat, d.h. $\partial I_\alpha = \emptyset$.

Aufgabe 2: *(3 Punkte)* Sei (X, d) ein metrischer Raum und sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in X mit Grenzwert $x \in X$. Wir definieren die Mengen

$$K := \{x_n \;:\; n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\} \qquad \text{und} \qquad L := \{x_n \;:\; n \in \mathbb{N}\}.$$

Beweise, dass K kompakt ist und L nicht zwingend kompakt sein muss.

Ausgabedatum: 29. November 2022 **Abgabetermin:** 5. Dezember 2022, 10:00 Uhr.